УДК 378.147. ББК 74.48 © И. И. Гончар, М. В. Чушнякова, С. Н. Крохин
DOI: 10.24411/2225-8264-2020-10016

И. И. Гончар, М. В. Чушнякова, С. Н. Крохин

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ФИЗИЧЕСКИМИ И МАТЕМАТИЧЕСКИМИ АСПЕКТАМИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «КОЛЕБАНИЯ» В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

В статье, главным образом, обсуждается соотношение между физическими и математическими аспектами при преподавании свободных, затухающих и вынужденных колебаний в техническом ВУЗе будущим бакалаврам техники и технологии. Во-первых, мы предлагаем преподавать данный раздел с использованием понятий обобщённой координаты, обобщённой скорости, обобщённого импульса, обобщённой массы, обобщённой жёсткости. Это позволяет объединить изучение очень разных в физическом смысле колебаний: механических, электрических и других (например, колебаний стрелки компаса в магнитном поле). Во-вторых, мы подчёркиваем, что математически эти колебательные процессы описываются линейными дифференциальными уравнениями (часто неоднородными), для которых в некоторых учебниках математики приведён эффективный алгоритм построения решения (иногда он называется методом вариации постоянных Лагранжа, иногда о нём упоминают как о принципе Дюамеля). Мы показываем, что в стандартных учебниках по общей физике при изложении данных тем этот алгоритм не рассматривается. В результате, как это часто бывает в технических ВУЗах, возникает разрыв между физикой и математикой, который снижает эффективность изучения обеих дисциплин. При изучении математики в техническом ВУЗе всегда важно показывать, для решения каких физико-технических задач данный материал применяется. В статье предложен новый подход к изложению раздела «Колебания», который включает в себя упомянутый нами эффективный математический алгоритм (метод Лагранжа). Этот алгоритм применён к случаю вынужденных колебаний вблизи резонанса, который традиционно рассматривается в технических ВУЗах, а также к случаю вынужденных колебаний вдали от резонансных частот.

Ключевые слова: преподавание физики во ВТУЗе, связь с преподаванием математики, гармонический осциллятор, метод Лагранжа.

Введение. В настоящее время в нашей стране реализуется национальный проект «Образование» [3, с.1], одной из целей которого является усилить ориентацию высшего образования на практическое применение компетенций в науке и промышленности. Нам представляется, что для достижения этой цели полезно оптимизировать преподавание некоторых разделов дисциплины «Физика» в высших технических учебных заведениях (ВТУЗах). В данной работе мы концентрируем своё внимание на преподавании раздела «Колебания». В многотомном учебнике Иродова [2, с.200] колебаниям посвящено 18 страниц. Соответствующий раздел начинается с зависимости координаты от времени, т. е. с решения дифференциального уравнения, а само дифференциальное уравнение строится на основе этого решения. Нам такой подход представляется спорным. В [2] рассматриваются три стандартных примера свободных колебаний: математический, физический и пружинный маятники. Для вынужденных колебаний, как обычно, записывается только установившееся решение, а связь с начальными условиями не обсуждается.

В первом томе трёхтомного учебника Савельева [4, с.221] колебаниям посвящена отдельная глава. Здесь детально рассматриваются свободные (незатухающие) колебания пружинного, математического и физического маятников, а также затухающие и вынужденные колебания гармонического осциллятора. Однако, метод Лагранжа не упоминается.

В первом томе многотомного учебника Сивухина [5, с.204] колебаниям также посвящена отдельная глава, в которой также детально рассмотрены свободные (незатухающие) колебания пружинного, математического и физического маятников, однако ни гармонический осциллятор, ни метод Лагранжа не упоминаются.

В первом томе трёхтомного учебника Астахова [1, с.172] колебаниям и волнам посвящена отдельная глава, которая начинается с параграфа «Одномерный гармонический осциллятор», в котором фактически вводится обобщённая координата. Такой подход наиболее близок нам. Математический, пружинный и физический маятники рассматриваются просто как примеры гармонического осциллятора. Далее рассмотрены затухающие и вынужденные колебания, но метод Лагранжа не упоминается и не используется.

Гармонический осциллятор (ГО)

Колебания представляют собой один из наиболее общих типов изменений, происходящих в живой и неживой природе и в технике. При этом какая-то характеристика движения (динамическая переменная) зависит от времени периодически. С математической точки зрения это означает, что процессы различной физической природы описываются одними и теми же дифференциальными уравнениями. Поэтому целесообразно изучить законы колебаний для некоторой абстрактной системы, а затем применить полученные результаты при решении конкретных задач. Такой абстрактной системой (фактически – математической моделью) и является ГО. Это система с одной степенью свободы, энергия которой (сумма кинетической и потенциальной) имеет вид

$$W = \frac{\tilde{m}\dot{\xi}^2}{2} + \frac{\tilde{k}\xi^2}{2} = \frac{p^2}{2\tilde{m}} + \frac{\tilde{m}\omega_0^2\xi^2}{2}. \qquad (1)$$

Здесь ξ – обобщённая координата, $\dot{\xi}$ – обобщённая скорость, $\tilde{k}$ – обобщённая жёсткость, $\tilde{m}$ - обобщённая масса, p – обобщённый импульс, ω_0 – собственная частота ГО, про которую более подробно будет сказано ниже. К виду (1) легко привести энергию пружинного, математического, физического маятников, а также электрического колебательного контура. Поскольку это сделано во многих учебниках, мы рассмотрим другой пример – колебания стрелки компаса в магнитном поле.

Для самой стрелки удобно использовать модель абсолютно твёрдого тела. В качестве обобщённой координаты удобно взять угол отклонения стрелки φ_z от равновесной ориентации (вдоль поля). Тогда её кинетическая энергия есть энергия плоского вращательного движения вокруг центральной оси z:

$$W_k = \frac{J_{cz}\Omega_z^2}{2} = \frac{J_{cz}\dot{\varphi}_z^2}{2}. \qquad (2)$$

Здесь J_{cz} – центральный момент инерции относительно вертикальной оси z, Ω_z – проекция угловой скорости на эту ось. Обращаем внимание читателя на то, что использование стандартного обозначения для угловой скорости – ω – сразу приведёт к опасному перекрытию обозначений, причём циклическая частота даже измеряется точно в тех же единицах, что и угловая скорость!

Потенциальная энергия (ПЭ) взаимодействия магнитного диполя с магнитным полем выражается формулой

$$W_p = -p_m B\cos(\varphi_z) \qquad (3)$$

Здесь p_m – модуль магнитного дипольного момента стрелки. Принимая угол малым и отсчитывая потенциальную энергию от её минимального значения $-p_m B$, приходим к полной энергии нашего «маятника» в виде

$$W = \frac{J_{cz}\dot{\varphi}_z^2}{2} + \frac{p_m B\varphi_z^2}{2}. \qquad (4)$$

Это в точности первая из формул (1) для ГО. В качестве обобщённой массы такого ГО выступает момент инерции стрелки, а роль обобщённой жёсткости играет $p_m B$.

Если ГО не подвержен никаким внешним воздействиям, то его энергия сохраняется. Дифференцируя первое равенство в (1) по времени, получаем дифференциально уравнение (ДУ), которое мы предлагаем называть *динамическим ДУ свободных (незатухающих) колебаний*

$$\tilde{m}\ddot{\xi} + \tilde{k}\xi = 0. \qquad (5)$$

В этом уравнении ещё видна специфика рассматриваемой физической системы. После деления на обобщённую массу получаем *кинематическое ДУ свободных (незатухающих) колебаний*

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0. \qquad (6)$$

Собственная частота ГО

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} \qquad (7)$$

не зависит от амплитуды колебаний.

Собственная частота свободных колебаний – их важнейшая характеристика. Однако ни в одном из стандартных втузовских учебников методы нахождения собственной частоты не обсуждаются.

Один из алгоритмов нахождения $\boldsymbol{\omega_0}$ таков: надо представить энергию исследуемой системы в виде (1), а затем воспользоваться формулой (7). Другой подход состоит в следующем. Сначала находим первую производную от ПЭ по координате и приравниваем её к нулю. Корни соответствующего уравнения есть координаты точек, подозрительных на экстремум. Затем берём вторую производную и смотрим на её знак в точках, подозрительных на экстремум. Если в одной из них вторая производная положительна – это минимум ПЭ, т. е. состояние устойчивого равновесия системы. Теперь ПЭ надо представить в виде степенного ряда вблизи этой точки и перенести в эту точку начало координат. Тогда ПЭ примет вид, который имеет второе слагаемое в формуле (1), а обобщённая жёсткость – это вторая производная от ПЭ по координате в этой точке. Наконец, третий способ нахождения собственной частоты состоит в том, что динамическое уравнение системы нужно представить в виде (5) и найти собственную частоту по формуле (7).

На самом деле свободные колебания почти всегда затухают. В первом приближении диссипативная сила пропорциональна обобщённой скорости. С учётом этой силы получаем кинематическое ДУ затухающих колебаний

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0. \tag{8}$$

Здесь $\boldsymbol{\beta}$ – коэффициент затухания, который определяется обобщённым коэффициентом сопротивления и обобщённой массой:

$$\mathbf{2}\boldsymbol{\beta} = \frac{\tilde{\boldsymbol{r}}}{\widetilde{\boldsymbol{m}}}. \tag{9}$$

Наконец, при наличии дополнительной внешней силы, зависящей от времени, получаем ДУ колебаний в виде

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = g(t). \tag{10}$$

Если $g(t)\sim cos(\omega t)$, то ДУ (10) принимает вид кинематического ДУ вынужденных колебаний.

Метод вариации постоянных Лагранжа

В предыдущем разделе мы увидели, что колебания, которые совершает ГО, описываются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Поэтому представляется целесообразным ознакомиться со свойствами таких уравнений и способами их решения. В этом разделе мы близко следуем учебнику В. И. Смирнова «Курс высшей математики», том II [6, с.102].

Итак, линейное неоднородное ДУ второго порядка с переменными коэффициентами имеет вид

$$\ddot{u} + b(t)\dot{u} + q(t)u = f(t). \tag{11}$$

Уравнение

$$\ddot{y} + b(t)\dot{y} + q(t)y = 0 \tag{12}$$

называется однородным уравнением, соответствующим уравнению (11). Справедлива теорема, которая утверждает, что если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – линейно независимые решения однородного уравнения (12), то его общее решение имеет вид

$$y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t). \tag{13}$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются начальными условиями. Если к тому же известно какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (11), $u_1(t)$, то

$$u(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + u_1(t) \tag{14}$$

есть общее решение неоднородного уравнения (11).

Для нахождения частного решения $\boldsymbol{u_1(t)}$ удобно использовать следующий метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). По аналогии с (13) напишем:

$$u_1(t) = h_1(t)y_1(t) + h_2(t)y_2(t). \tag{15}$$

Две вспомогательные функции (бывшие постоянные) $\boldsymbol{h_1(t)}$ и $\boldsymbol{h_2(t)}$ подчиним дополнительному условию

$$\dot{h}_1(t)y_1(t) + \dot{h}_2(t)y_2(t) = 0, \tag{16}$$

чтобы выполнялось равенство

$$\dot{u}_1 = h_1\dot{y}_1 + h_2\dot{y}_2. \tag{17}$$

Дифференцирование (17) по времени даёт

$$\ddot{u}_1 = \dot{h}_1\dot{y}_1 + \dot{h}_2\dot{y}_2 + h_1\ddot{y}_1 + h_2\ddot{y}_2. \tag{18}$$

Умножаем уравнение (15) на $\boldsymbol{q}$, а уравнение (17) – на $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q}$ – это коэффициенты в уравнениях (11) и (12)):

$$qu_1 = qh_1y_1 + qh_2y_2. \tag{19}$$

$$b\dot{u}_1 = bh_1\dot{y}_1 + bh_2\dot{y}_2. \tag{20}$$

Подставляем (18)-(20) в исходное уравнение (11) и перегруппировываем слагаемые:

$$h_1(\ddot{y}_1 + b\dot{y}_1 + qy_1) + h_2(\ddot{y}_2 + b\dot{y}_2 + qy_2) + \dot{h}_1\dot{y}_1 + \dot{h}_2\dot{y}_2 = f(t). \tag{21}$$

Первые две скобки обращаются в нуль, так как y_1 и y_2 – решения однородного уравнения (12). Оказывается, что для двух вспомогательных функций $\dot{h}_1(t)$ и $\dot{h}_2(t)$ получилась система из двух линейных алгебраических уравнений

$$\dot{h}_1\dot{y}_1 + \dot{h}_2\dot{y}_2 = f(t). \tag{22}$$

$$\dot{h}_1 y_1(t) + \dot{h}_2(t) y_2(t) = 0. \qquad (23)$$

Выражаем из них $\dot{h}_1(t)$ и $\dot{h}_2(t)$:

$$\dot{h}_2(t) = \frac{f y_1}{\dot{y}_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2}, \quad \dot{h}_1(t) = -\frac{f y_2}{\dot{y}_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2}. \qquad (24)$$

В правых частях уравнений (24) стоят известные функции времени, так что для нахождения вспомогательных функций $h_1(t)$ и $h_2(t)$ теперь осталось только выполнить интегрирование в уравнениях (24). Затем найденные функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ подставляем в (15), а после этого – в (14). Таким образом, общее решение исходного неоднородного уравнения (11) получено для любого вида функции $f(t)$.

Свободные незатухающие колебания

Для свободных незатухающих колебаний в уравнении (12) $\boldsymbol{b(t) = 0}$, $\boldsymbol{q=\omega_0^2}$ (см. уравнение (6)). Начальные условия имеют вид

$$y(t=0) = y_0, \; \dot{y}(t=0) = \dot{y}_0. \qquad (25a, b)$$

Два линейно независимых решения уравнения (12) имеют вид

$$y_1(t) = cos(\omega_0 t), \; y_2(t) = sin(\omega_0 t) \qquad (26)$$

И соответственно

$$y(t) = y_0\, cos(\omega_0 t) + \dot{y}_0 \omega_0^{-1} sin(\omega_0 t). \qquad (27)$$

Часто удобнее представить (27) в виде

$$y(t) = y_m\, cos(\omega_0 t + \alpha_0). \qquad (28)$$

Возвращаясь к физическим обозначениям, перепишем (28) в виде

$$\xi(t) = \xi_m\, cos(\omega_0 t + \alpha_0). \qquad (29)$$

где $\boldsymbol{\xi_m}$ – амплитуда колебаний, а $\boldsymbol{\alpha_0}$ – их начальная фаза. Связь амплитуды и фазы с начальными условиями $\boldsymbol{\xi_0}$ и $\boldsymbol{\dot{\xi}_0}$ можно найти почти в любом учебнике.

Затухающие колебания

Для свободных затухающих колебаний в уравнении (12) $\boldsymbol{b(t) = 2\beta}$, $\boldsymbol{q=\omega_0^2}$. Начальные условия имеют вид (25).

Формально решение уравнения (12) нужно искать в виде

$$y = exp(\lambda t). \qquad (30)$$

Подставляя (30) в (12), получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0\,. \qquad (31)$$

Его корни имеют вид

$$\lambda_{+,-} = -\beta \pm i\, \omega_d, \qquad (32)$$

где частота затухающих колебаний $\boldsymbol{\omega_d}$ выражается формулой

$$\omega_d = (\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}\,. \qquad (33)$$

Общее решение ДУ (12) есть сумма двух линейно независимых решений, отвечающих двум корням:

$$\xi = C_+\, exp(\lambda_+ t) + C_-\, exp(\lambda_- t). \qquad (34)$$

В случае затухающих колебаний ($\boldsymbol{\omega_0^2 > \beta^2}$) из формулы (34) получается формула (35)

$$\xi = \xi_{m0}\, exp(-\beta t)\, cos(\omega_d t + \alpha_0), \qquad (35)$$

которую можно найти во многих учебниках. Основной эффект затухания при этом – медленное убывание со временем амплитуды колебаний

$$\xi_m = \xi_{m0}\, exp(-\beta t). \qquad (36)$$

Отсюда видно, что время релаксации амплитуды $\boldsymbol{\tau_A}$ составляет $\boldsymbol{\beta^{-1}}$.

Важные характеристики колебательной системы с затуханием – её логарифмический декремент затухания Λ и добротность Q. Их определения имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{\Lambda = \ln\frac{\xi_m(t)}{\xi_m(t+\tau_0)}; \quad Q = 2\pi\frac{\langle W(t)\rangle_{\tau 0}}{\Delta W_{\tau 0}(t)}.} \qquad (37a, b)$$

Здесь $\boldsymbol{\tau_0}$ – период собственных колебаний, а $\Delta \boldsymbol{W}_{\tau 0}(\boldsymbol{t}) > \boldsymbol{0}$ – убыль энергии колебаний за один период. $\langle \boldsymbol{W}(\boldsymbol{t})\rangle_{\tau 0}$ – энергия осциллятора, усреднённая за один период.

Фактически понятие добротности нужно не столько для затухающих, сколько для вынужденных колебаний. Там добротность можно сразу оценить по виду резонансной кривой. В технике применяются и системы с низкой добротностью, которые движутся в режиме апериодического затухания. Примером такой системы является амортизатор. В таких системах вся энергия осциллятора диссипирует быстрее, чем за один период.

Вынужденные колебания. Резонанс.

Для нахождения зависимости координаты осциллятора от времени решаем уравнение (10) (или, что то же самое уравнение (11) с $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{2\beta}$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{\omega_0^2}$), не конкретизируя пока правую часть. Используя метод Лагранжа, получаем по формулам (24) с учётом формул (32), (34):

$$h_2(t) = +\frac{1}{2i\omega_d}\int_0^t f(s)\exp(-\lambda\_s)ds, \qquad (38)$$

$$h_1(t) = -\frac{1}{2i\omega_d}\int_0^t f(s)\exp(-\lambda_+ s)ds. \qquad (39)$$

Согласно (14), (15), общее решение уравнения (10) имеет вид

$$\xi(t) = C_+ exp(\lambda_+ t)+C\_exp(\lambda\_t) + h_1(t)exp(\lambda_+ t) + h_2(t)exp(\lambda\_t). \qquad (40)$$

Чтобы получить из (40) стандартное решение в случае резонанса, подставляем $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = \widetilde{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}}\widetilde{\boldsymbol{m}}^{-1}\cos(\boldsymbol{\omega t})$. Здесь $\boldsymbol{\omega}$ – частота обобщённой внешней вынуждающей силы (ВВС), $\widetilde{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}}$ – её амплитуда. Первые два слагаемых в формуле (40) описывают затухающие колебания. Эти слагаемые представляют собой решение соответствующего однородного уравнения; это решение определяется начальными условиями и свойствами самого осциллятора, оно не имеет отношения к вынужденным колебаниям. Поэтому будем считать, что первоначально осциллятор покоится в положении равновесия, т.е. $C_+ = C\_ = \boldsymbol{0}$. Затем выражаем $\cos(\boldsymbol{\omega t})$ через комплексные экспоненты и проводим интегрирование в (38), (39). В результате получаем

$$\xi(t) = \frac{\tilde{F}_m}{4i\omega_d\widetilde{m}}\left\{\frac{e^{i\omega t} - e^{\lambda_+ t}}{i\omega - \lambda_+} - \frac{e^{-i\omega t} - e^{\lambda_+ t}}{i\omega + \lambda_+} - \frac{e^{i\omega t} - e^{\lambda\_t}}{i\omega - \lambda\_} + \frac{e^{-i\omega t} - e^{\lambda\_t}}{i\omega + \lambda\_}\right\}. \qquad (41)$$

В результате довольно громоздких алгебраических преобразований комплексные экспоненты сворачиваются в синусы и косинусы. Финальное выражение имеет вид

$$\xi(t) = \frac{\tilde{F}_m}{z^2\widetilde{m}}\left\{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t) + 2\omega\beta\sin(\omega t) + e^{-\beta t}\left[(\omega^2 - \omega_0^2)\cos(\omega_d t) - \frac{\beta}{\omega_d}(\omega^2 + \omega_0^2)\sin(\omega_d t)\right]\right\}. \qquad (42)$$

Здесь

$$z = [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2]^{1/2} \qquad (43)$$

представляет собой импеданс ГО. Легко видеть, что решение (42) удовлетворяет начальным условиям $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$.

Физически решение (42) означает, что с началом действия ВВС возбуждаются собственные колебания осциллятора с затуханием, амплитуда которых быстро (при $\boldsymbol{\omega_0^2} \gg \boldsymbol{\beta^2}$) уменьшается. Заметим, что в учебниках [1,2,4,5] это решение не приводится.

Первая часть формулы (42) описывает хорошо известные установившиеся вынужденные колебания с резонансной зависимостью амплитуды от частоты ВВС. Естественно, эти колебания совершаются с частотой ВВС $\boldsymbol{\omega}$ и отстают от ВВС по фазе на $\boldsymbol{\alpha_f}(\boldsymbol{\omega})$. Как этот сдвиг фазы, так и амплитуда вынужденных колебаний $\boldsymbol{\xi_{mf}}(\boldsymbol{\omega})$ зависят от $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega_0}$. Эти зависимости часто называют амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристиками (АЧХ и ФЧХ соответственно). Уравнения этих характеристик имеют вид:

$$\xi_{mf}(\omega) = \frac{\tilde{F}_m}{z\widetilde{m}}, \qquad (44)$$

$$tg[\alpha_f(\omega)] = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (45)$$

Первое из этих соотношений описывает так называемую резонансную кривую. Резонанс – резкое увеличение амплитуды вынужденных колебаний – возникает, когда частота ВВС очень близка к собственной частоте системы. Физической причиной резонанса является идеальная согласованность между ВВС и обобщённой скоростью колеблющейся системы: они находятся всё время в фазе. При удалении от резонанса ВВС тормозит систему в течение некоторой части периода.

Вынужденные колебания вдали от резонанса

Вдали от резонанса влиянием трения на вынужденные колебания обычно пренебрегают. Это случай, когда типичная частота внешней вынуждающей силы в уравнении (10) далека от собственной частоты осциллятора. Уравнение (10) тогда принимает вид:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = g(t). \qquad (46)$$

Вид зависимости «силы» $g(t)$ от времени может быть любым. Для нахождения зависимости координаты от времени используем метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Сравнивая уравнение (46) с уравнением (11), видим, что $b = 0$, $q = \omega_0^2$, $f(t) = g(t)$. Вид линейно независимых решений однородного уравнения хорошо известен

$$y_1(t) = C_s \sin[\omega_0(t - t_0)], \quad y_2(t) = C_c \cos[\omega_0(t - t_0)]. \qquad (47)$$

В отличие от формул (26) мы не считаем теперь начальный момент времени t_0 нулевым. Постоянные C_s и C_c определяются из начальных условий и обеспечивают правильную размерность (такую же как у ξ). Подстановка формул (47) в формулы (24) даёт для их знаменателя

$$\dot{y}_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2 = -C_s C_c \omega_0. \qquad (48)$$

Интегрируя формулы (24), получаем

$$h_1(t) = 1 + \frac{1}{\omega_0 C_s} \int_{t_0}^{t} g(s) \cos(\omega_0 s) ds, \qquad (49)$$

$$h_2(t) = 1 - \frac{1}{\omega_0 C_c} \int_{t_0}^{t} g(s) \sin(\omega_0 s) ds. \qquad (50)$$

Интегрирование проведено в таких пределах, чтобы в начальный момент времени интегралы обращались в нуль, а $\xi(t_0)$ превращалось в сумму $y_1(t_0) + y_2(t_0)$. Подставляя (47), (49) и (50) в (14), получаем

$$\xi(t) = C_s \sin[\omega_0(t - t_0)] + C_c \cos[\omega_0(t - t_0)] + \frac{1}{\omega_0} \int_{t_0}^{t} ds\, g(s) V(t, s), \qquad (51)$$

где

$$V(t, s) = \cos(\omega_0 s) \sin[\omega_0(t - t_0)] - \sin(\omega_0 s) \cos[\omega_0(t - t_0)] = \sin[\omega_0(t - t_0 - s)]. \qquad (52)$$

Таким образом, уравнение (46) решено методом Лагранжа для произвольного вида правой части, которая имеет смысл внешней вынуждающей силы.

Заключение

Мы предложили новый метод преподавания темы (раздела) «Колебания». В этом методе заложены и реализованы две основные идеи. Во-первых, изложение материала ведётся на основе математической модели гармонического осциллятора, что позволяет получить все результаты независимо от физической природы колебаний. Во-вторых, для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, каким является самое общее уравнение, описывающее линейные колебания, используется метод вариации постоянных Лагранжа. Этим методом мы получаем самое общее решение задачи о вынужденных колебаниях, как вблизи резонанса, так и вдали от него.

Библиографический список

1. Астахов, А. В. Курс физики. Том 1. Механика. Кинетическая теория материи [Текст]/ А.В. Астахов, Ю.М. Широков. – М.: Наука, 1977. – 388 с.

2. Иродов, И. Е. Механика. Основные законы [Текст] – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 309 с.

3. Минпросвещения России: Национальный проект «Образование» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://edu.gov.ru/national-project/. Дата обращения (31.03.2020), свободный.

4. Савельев, И. В. Курс общей физики: Учеб. пособие для втузов в 3 т. Т. 1. Механика, колебания и волны, молекулярная физика [Текст] – М.: Наука, 1970. – 508 с.

5. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Учебное пособие в 5 т. Том 1. Механика [Текст] – М.: Физматлит, 2014. – 560 с.

6. Смирнов, В. И. Курс высшей математики. Учебник для вузов в 5 томах. Том II [Текст] – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2008. – 848 с.

References

1. Astahov A. V., Shirokov Yu. M. *Kurs fiziki. Tom 1. Mekhanika. Kineticheskaya teoriya materii* [Course of physics. Mechanics. Kinetic theory of matter]. – Moscow, Nauka, 1977. – 388 p.
2. Irodov I. E. *Mekhanika. Osnovniye zakony* [Mechanics. Principal laws]. – Moscow, BINOM. Laboratoriya znaniy, 2014. – 309 p.
3. *Minprosveschenya Rossii: Natsional'nyi proekt "Obrazovanie"* [Ministry of Enlightenment of Russia: National project "Education"] – URL: https://edu.gov.ru/national-project/. (31.03.2020).
4. Savel'ev I. V. *Kurs obschei fiziki: Uchebnoe posobie dlya vtuzov v 3 t. Tom 1. Mekhanika, kolebaniya i volny, molekulyarnaya fizika* [Course of the general physics: Textbook for technical universities in 3 books. Book 1. Mechanics, vibrations and waves, molecular physics]. – Moscow, Nauka, 1970. – 508 p.
5. Sivukhin D. V. *Obschiy kurs fiziki. Uchebnoe posobie v 5 t. Tom 1. Mekhanika* [General course of physics: Textbook in 5 books. Book 1. Mechanics]. – Moscow, Fizmatlit, 2014. – 560 p.
6. Smirnov V. I. *Kurs vjsshey matematiki: Uchebnik dlya vuzov v 5 t. Tom II* [Course of the calculus: Textbook for universities in 5 books. Book II]. – Sant-Petersburg, BHV-Peterburh, 2008. – 848 p.

RELATIONSHIP BETWEEN PHYSICAL AND MATHEMATICAL ASPECTS DURING STUDYING THE TOPIC "OSCILLATIONS" AT A TECHNICAL UNIVERSITY

Igor I. Gontchar,
Physics and Chemistry Department, Omsk State Transport University, Omsk, Russia

Maria V. Chushnyakova,
Physics Department, Omsk State Technical University, Omsk, Russia

Sergey N. Krokhin,
Physics and Chemistry Department, Omsk State Transport University, Omsk, Russia

Abstract. The article, mainly, is dedicated to the discussion of a relation between physical and mathematical aspects of teaching the free, damping, and induced oscillations in technical university to the rising bachelors of engineering and technology. Firs of all, we propose to teach this topic using the notions of the generalized coordinate, generalized momentum, generalized mass, and generalized stiffness. This allows to unify the studying of physically different types of oscillation (mechanical, electrical, etc.). Second, we emphasize that mathematically these oscillating processes are described by linear differential equations (often non-homogeneous ones) which might be solved by an effective algorithm presented in several mathematical textbooks (this algorithm sometimes is called as the Lagrange method, sometimes it is mentioned as the Duhamel principle). We demonstrate that, in standard general physics textbooks, during the presentation of the topic "Oscillations", this algorithm is not addressed. As a result, as it usually happens in universities, a gap appears between the physics and mathematics which reduces the efficiency of both subjects studying. While teaching the mathematics in a technical university, it is important to demonstrate for which physical problem the studying material might be applied. In the article, a new approach for teaching the topic "Oscillations" is proposed; it includes the indicated effective mathematical algorithm (the Lagrange method)

Keywords: physics teaching at technical university, relation with mathematics teaching, harmonic oscillator, the Lagrange method.

Сведения об авторах:

Гончар Игорь Иванович – профессор кафедры «Физика и химия» Омского государственного университета путей сообщения (644046, Российская Федерация, г.Омск, ул.Волочаевская д.13е, кв.202), e-mail: vigichar@hotmail.com

Чушнякова Мария Владимировна – доцент кафедры «Физика» Омского государственного технического университета (644050, Российская Федерация, г.Омск, ул.Волочаевская д.13е, кв.202), e-mail: maria.chushnyakova@gmail.com

Крохин Сергей Николаевич – заведующий кафедры «Физика и химия» Омского государственного университета путей сообщения (644081, Российская Федерация, г.Омск, ул.Рокоссовского д.10кв.156), e-mail: krokhinsn@mail.ru

Статья поступила в редакцию 10.04.2020 г.